Grundlagen

22.03.2011

Medizinische Messtechnik

Theoretische Grundlagen

- Fehlerrechnung
- Genauigkeitsbetrachtung
- Statische/dynamische Beschreibung
- (Signalverarbeitung)

Sensorik

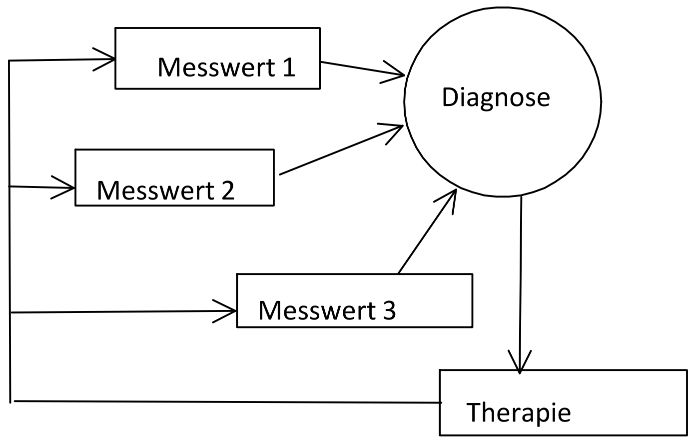
- Physik Prinzip
- Charakteristika
- Einsatzmöglichkeiten

1.Vorüberlegungen

22.3.2011

Wozu gibt es Messungen in der Medizin?

- Intensivüberwachung --> Monitoring
  --> Zustandsveränderungen (individuell)
- Vergleich mit Normen
  - Statistisch
  - Ideal
  --> therapent. Konsequenz (interindividuell)
- Austausch von Daten



Typische Messungen in der Medizin:

- Blutdruck
  - Invasiv (dynamisch)
  - Nicht invasiv (Extremwerte)
- Pulsfrequenz
- Blutzuckerkonzentrationen und andere "Laborwerte"
- O_2- Sättigung
- Temperatur
- Lunge: Druck, Volumenstrom, Volumen…
- Schallbezogene Größen
- Elektrische Messgrößen (Spannungen)
- Magnetische Messgrößen(Flussdichte)

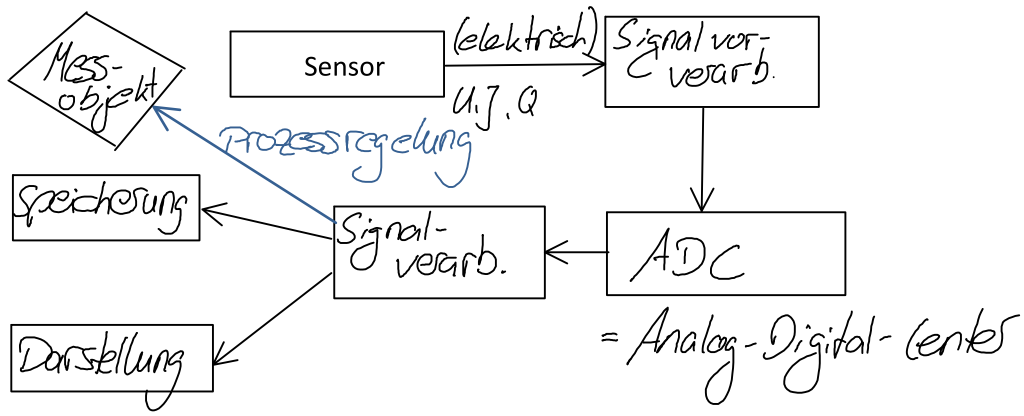
Veränderungen/Reaktionen auf künstliche Signale

- Impedanzkardiographie (Kardio = Herz) --> Schlagvolumen Herz
- Ultraschall [Sono/graphie (Sono= Schal)]
  Orts- / Zeitmessung
- Röntgenstrahlungsmessung (Ortsmessung - Absorptionsmessung)
- Magnetresonanztomographie
  Aufgeprägtes Signal
  - Magnetfelder (Gradienten)
  - Elektromagn. Impulse

Messung: Relaxationszeiten von Feldern

- Lichttomographie (Netzhaut Auge)
- Nuklearmedizinische Diagnostik
  - Aufgeprägt: Radionuklid
  - Messung: z.B. gamma-Strahlungsintensität (Ort)

Messkette:



2.1 Einheitensystem

2.2.1 MkSA - Systeme

Größe	Zeichen	Einheit	Zeichen Einheit
Länge	ℓ	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	J	Ampere	A

2.1.2 Si-System

MkSA + 3 neue Einheiten

Größe	Zeichen	Einheit	Zeichen Einheit
Temperatur	T	Kelvin	K
Lichtstärke	J	Candela	cd
Stoffmenge	Na	Mol	Mol

2.1.3 Abgeleitete Einheiten

Kraft $F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 \cdot s}{dt}$

$$1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2} \quad \text{(kohärente Einheit)}$$

zusätzlicher Faktor → nicht kohärent

$km/s = 1000\,m/s$ → nicht kohärent

kWh nicht kohärent

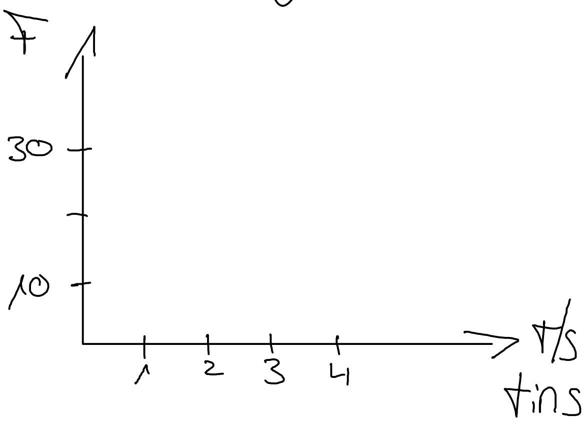
$$1\,Pa = \frac{1\,N}{m^2} \quad \text{kohärent}$$

$$1\,V = \frac{1\,W}{1\,A} = \frac{1\,J}{1\,As} = \frac{1\,Nm}{1\,As} = \frac{1\,kgm^2}{As^3}$$

kohärent

$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} \qquad 1S(iemens) = \frac{1A}{1V}$$

2.1.4 Umgang mit Einheiten



t/s	F/N	
1	10	
2	50	
3	100	
10	$\cancel{1{,}5k}$	
10	$1{,}5 \cdot 10^3$	

$\Rightarrow$ gültige Stellen...!

523,456 N

$\rightarrow$ Sinn?

Übung

Welchen Druck hat 1cm Wassersäule?

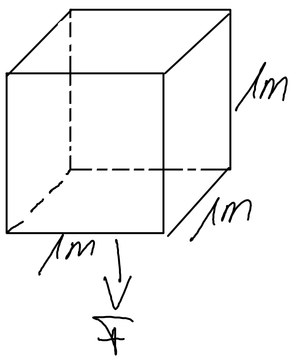
Mediziner-Druckeinheit i.d. Lunge: cm H_2O

→ Pa?

↳ Höhe d. Wassersäule

⟹ 1m H_2O

$\rho = \frac{1 kg}{l}$



$F = 1000 kg \cdot 9{,}81 m/s^2$

$p = \frac{9810 N}{m^2}$

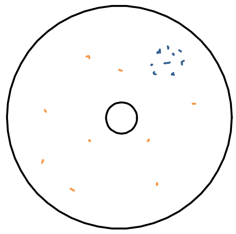
$= 9810 Pa$

$1 cm\ H_2O = 98{,}10 Pa = 0{,}981 hPa \approx 1 hPa$

2.2 Messgenauigkeit

22.3.11

Schießen auf Zielscheibe



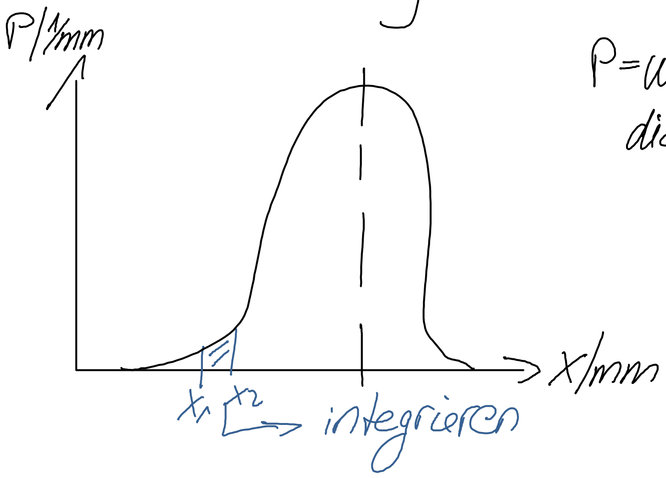
- starker systematischer Fehler
- kleiner stochast. Fehler

- kaum system. Fehler
- großer stochast. Fehler

Systematischer Fehler beschreibt → Richtigkeit
Stochast. Fehler beschreibt → Präzision

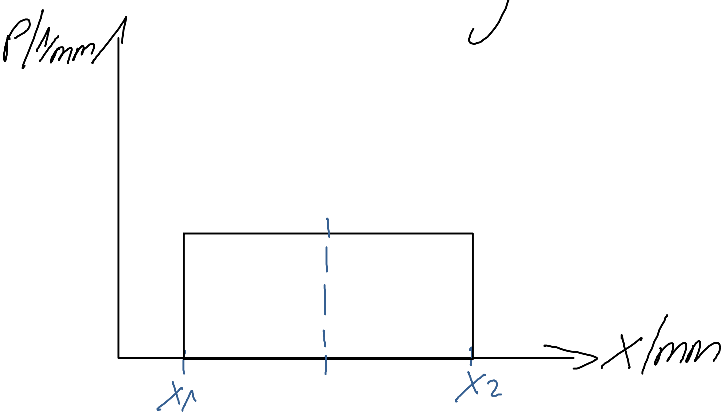
Statistische Fehlerverteilung (stochast. Fehler)

1. Normalverteilung



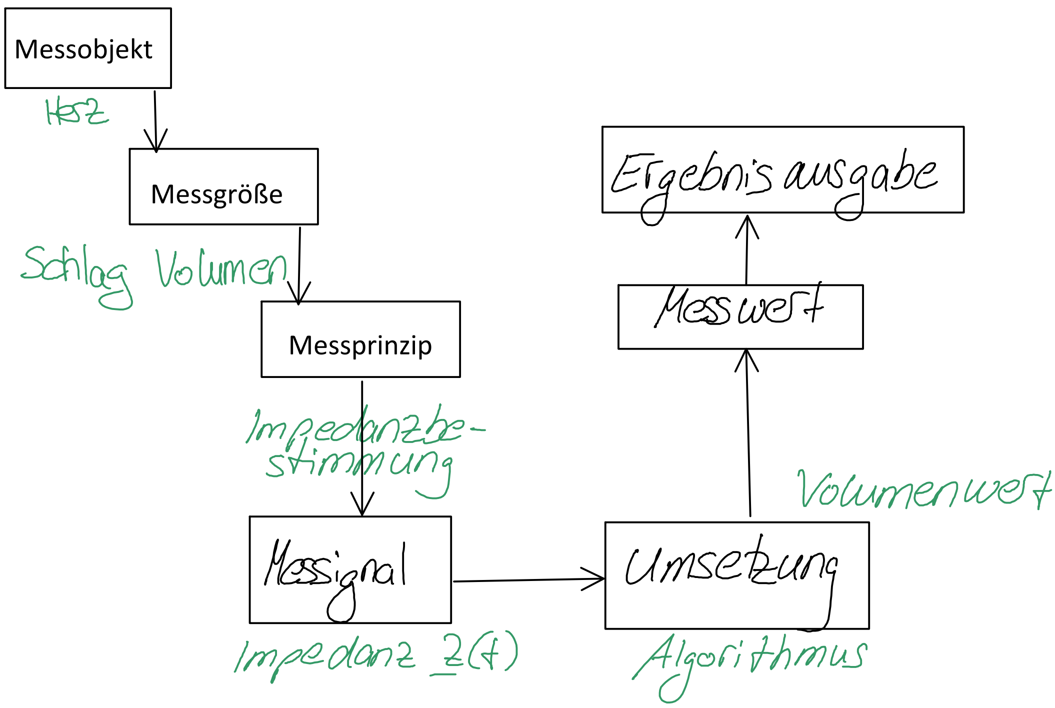
P = Wahrscheinlichkeitsdichte

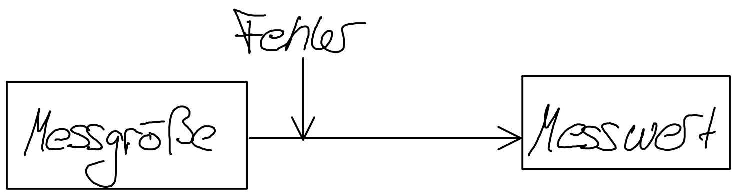
2. Rechteckverteilung



2.Definitionen Messtechnik

22.03.11





$\bar{x} \pm \Delta x$

Messwert: Zahl - Einheit

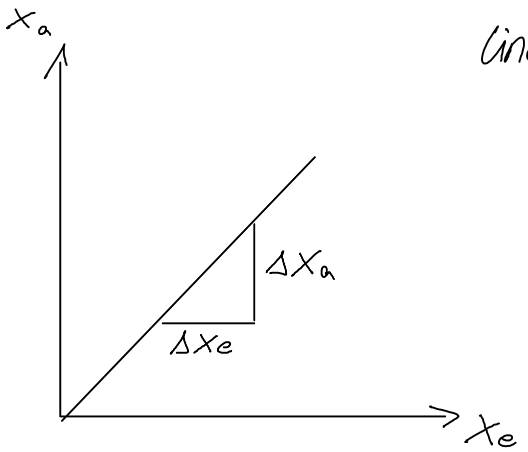
3.Statische Beschreibung von Messsystemen

29.3.2011

'statisch':

- Eingangssignal unveränderlich in der Zeit
- Ausgangssignal konstant
- Eingang / Ausgangssignal f=0

Eingangssignal: x_e
Ausgangssignal: x_a

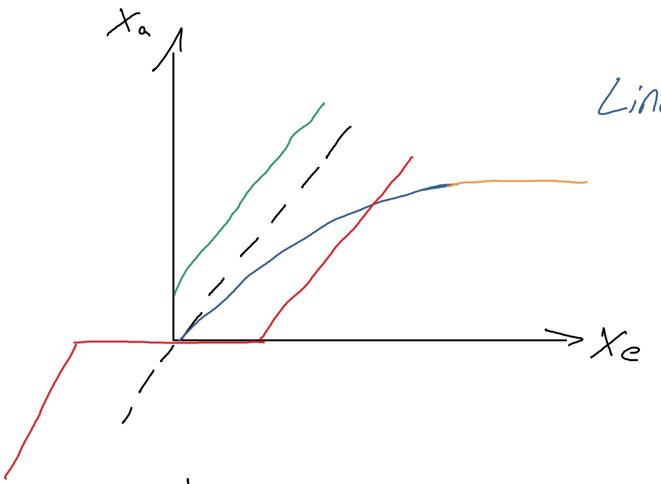


lineare Kennlinie

$$K = \frac{X_a}{X_e} = \frac{\Delta X_a}{\Delta X_e}$$

statischer Übertragungsfaktor

Abweichung von idealer Kennlinie

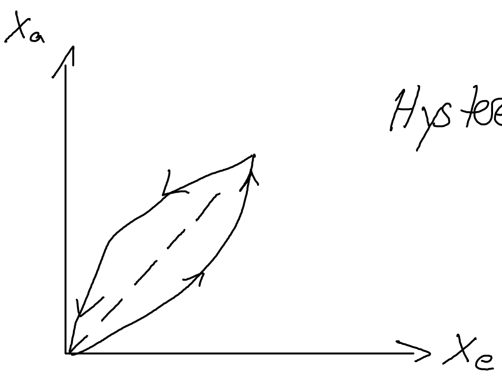


Linearitätsfehler
- Sättigung

Offset

Totband

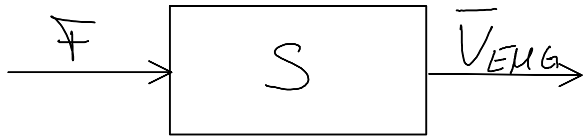
Steigungsfehler



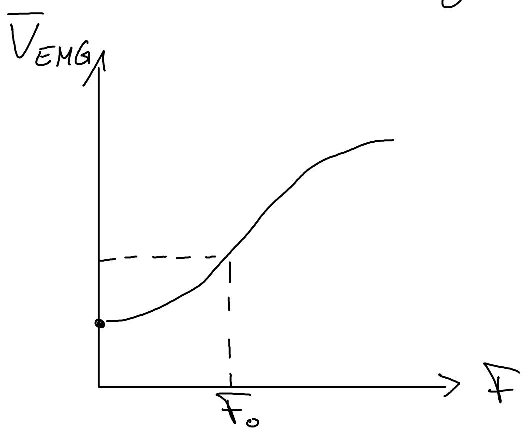
Hysterese

Jeder Wert i.d. Schleife kann bei d. Messung herauskommen!

Bsp.: Kennlinie für Muskeltätigkeit

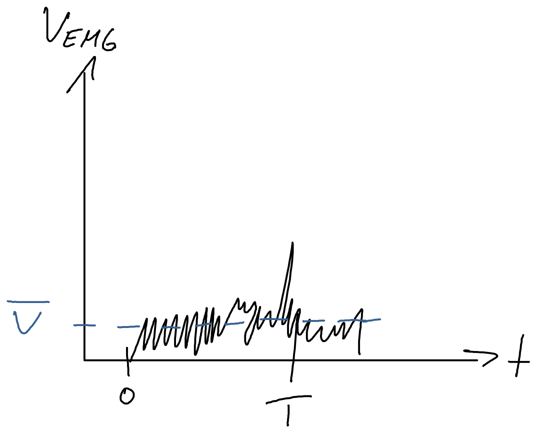


EMG = Elektromyogramm



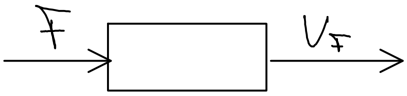
$$k = \frac{d\overline{V}_{EMG}}{dF}(F_0)$$

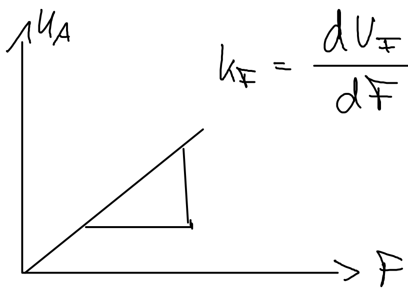
Einheit v. k: $\frac{mV}{N}$



$$\overline{V}_{EMG} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)\,dt}$$

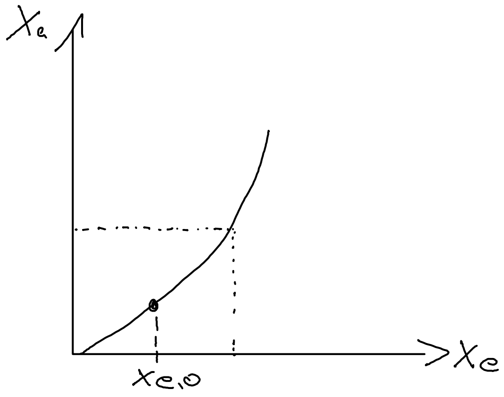
Kennlinie Kraftsensor





$$k_F = \frac{dU_F}{dF}$$

Linearisierung von Kennlinien



$$k = \frac{dx_a}{dx_e}(x_{e,0})$$

$$x_a = f(x_e)$$

$$f(x_e + \Delta x_e) = f(x_{e,0}) + f'(x_{e,0}) \cdot \Delta x + f''(x_{e,0}) \cdot \Delta x^2$$

Linearisierung | Fehler

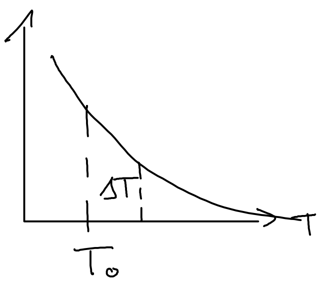
Bsp.: Heißleiter

$$T \longrightarrow \boxed{K} \longrightarrow R$$

$$R(T) = R_0 \cdot e^{\frac{a}{T}}$$

$\parallel$

Kennlinie



$$R(T_0 \pm \Delta T) = R(T_0) \pm R'(T_0) \cdot \Delta T$$

$$R'(T_0) = R_0 \cdot e^{\frac{a}{T}} \cdot \left(-\frac{a}{T^2}\right)$$

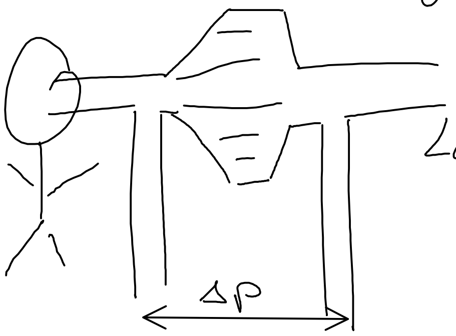
$$R(T_0 \pm \Delta T) = R(T_0) \pm R_0 \cdot e^{\frac{a}{T}} \cdot \left(-\frac{a}{T^2}\right) \cdot \Delta T$$

4.Struktur von Messsystemen

29.3.11

4.1 Kettenstruktur

Bsp.: Pneumotachograph (=Luftgeschwindigkeit)



→ laminare Strömung

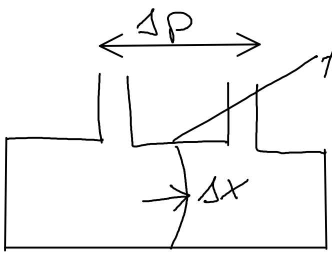
Luftwiderstand R

$$\Delta p = R \cdot \dot{V}_{Luft}$$

$$\text{„Flow"} = \frac{dV_{Luft}}{dt} = \dot{V}_{Luft} \xrightarrow{\dot{V}} \boxed{k_1 = R} \xrightarrow{\Delta p}$$

$$[R] = \frac{Pa \cdot s}{m^3} = \frac{Ns}{m^5} = \frac{kg \cdot m \cdot s}{s^2 \cdot m^5} = \frac{kg}{s \cdot m^4}$$

2. System: Differentialdruckmessung



$$\Delta p = D \cdot \Delta x = \frac{1}{C} \cdot \Delta x$$

$$\xrightarrow{\Delta p} \boxed{k_2 = C} \xrightarrow{\Delta x} \qquad [C] = \frac{m}{Pa}$$

Zusammenfassung:

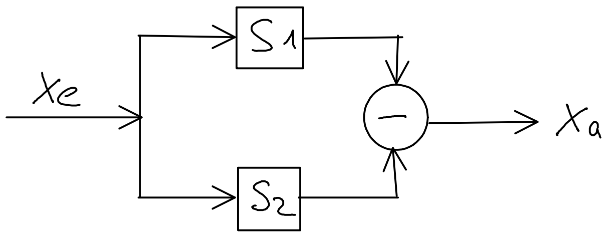
$$\xrightarrow{\dot{V}} \boxed{k_1} \xrightarrow{\Delta p} \boxed{k_2} \xrightarrow{\Delta x}$$

$$\Delta x = C \cdot \Delta p = \underbrace{C \cdot R}_{k_1 k_2} \cdot \dot{V}_{Luft} \qquad k_{1,2} = k_1 \cdot k_2$$

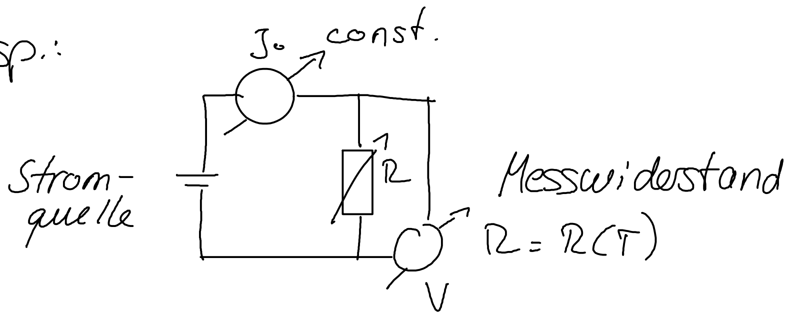
Allgemein:

Kettenstruktur $K_{ges} = \prod_{i=1}^{n} k_i$

4.2 Parallelstruktur



Bsp.:



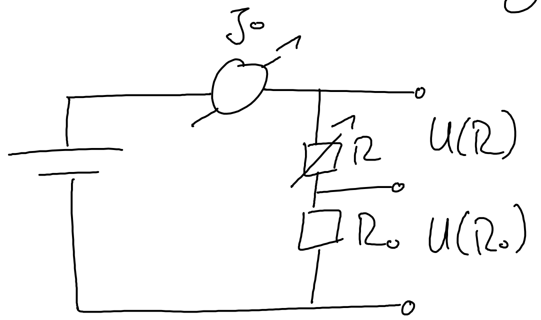
$$V = R(T) \cdot J_0 \curvearrowright R(T) = \frac{V}{J_0}$$

Bsp.:

$$R(T_0) = 1.00\,k\Omega$$
$$R(T) = 1.01\,k\Omega$$
$$J_0 = 1\,mA$$

$$V(T_0) = 1.00\,k\Omega \cdot 1\,mA = 1\,V$$
$$V(T) = 1.01\,k\Omega \cdot 1\,mA = 1.01\,V$$

Abhilfe: Differenzmessung

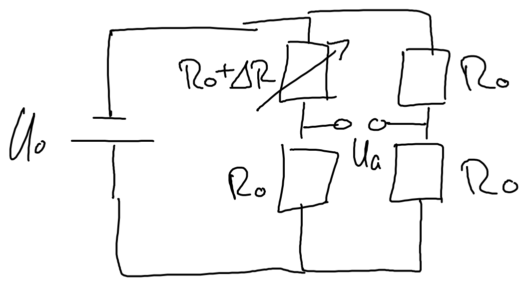


$\rightarrow V = V(R) - V(R_0)$

$= 0$ für T_0

$= 10\,mV$ für T

Klassische Umsetzung: Messbrücke



wenn $\Delta R = 0$

$\Rightarrow U_a = 0$

$U_a = 0$, wenn $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$

$\Rightarrow R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$ Abgleichbedingung

Abgeglichen:

z.B.: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_0$

Messwiderstand:

$R_1 = R_0 + \Delta R$

$U_a = U_0 \cdot 1/4 \cdot \dfrac{\Delta R}{R_0}$ Viertelbrücke

Messwiderstände:

$R_1 = R_4 = R_0 + \Delta R$

oder $R_1 = R_0 + \Delta R$
$R_2 = R_0 - \Delta R$

oder $R_1 = R_0 + \Delta R$
$R_3 = R_0 - \Delta R$

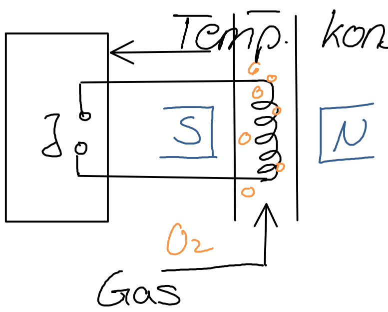
$U_a = U_0 \cdot 1/2 \cdot \frac{\Delta R}{R_0}$ Halbbrücke

$$\left.\begin{array}{l} -R_1 = R_4 = R_0 + \Delta R \\ \text{und} \quad R_2 = R_3 = R_0 - \Delta R \end{array}\right\} U_a = U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R_0} \text{ (Vollbrücke)}$$

Bsp.:

O_2-Messung Luft

Prinzip: O_2 paramagnetisch
Verwirblung im Magnetfeld
Heizung, temperaturabh. Widerstand
zusätzl. Temperaturmessung



konstant $\Rightarrow J^2 \cdot R \sim \dot{V}$

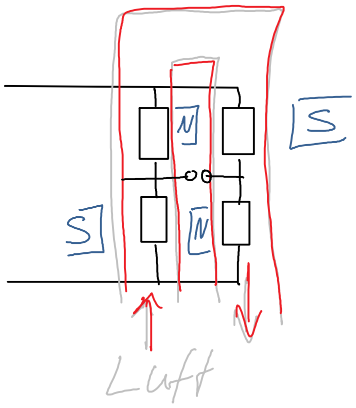
zusätzlich $\dot{V}$ const.
Magnetfeld

$J^2 \cdot R \sim C_{O_2}$

andere Möglichkeit: J = const.
T variabel

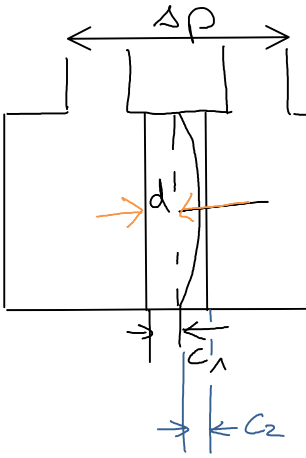
$T \rightarrow R_m(t)$

Halbbrücke



Erweiterung auf nicht-ohmsche Widerstände

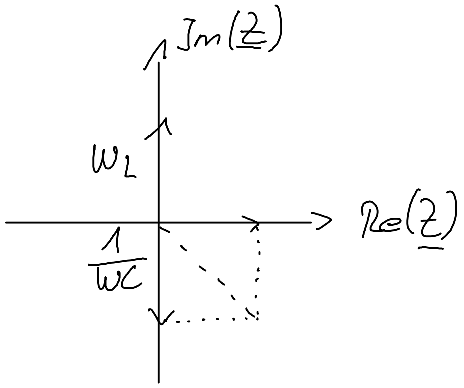
Bsp.: Differentialdrucksensor



In Ruhelage: $\Delta p = 0$

$$C_1 = C_2 = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega \cdot C}$$



vgl. Induktivität L:

$\underline{Z}_L = j\omega L$

andere Einstellung

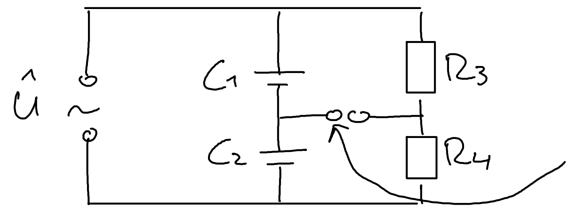
$\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi}$, für C: $\varphi = -90°$

$\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{-j\frac{\pi}{2}}$, für L: $\varphi = +90°$

Auslenkung Membran um Δx:

$$C_1 = \varepsilon \cdot \frac{A}{d+\Delta x} \quad ; \quad C_2 = \varepsilon \cdot \frac{A}{d-\Delta x}$$

$$|\underline{Z}_1| = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{d+\Delta x}{\varepsilon \cdot A \cdot \omega} \quad ; \quad |\underline{Z}_2| = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{d-\Delta x}{\varepsilon \cdot A \cdot \omega}$$



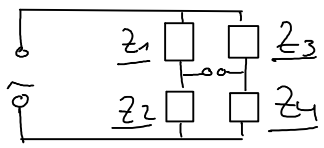
$U = \hat{U}$ const.

$U_a = \hat{U}_a \cos(\omega t + \varphi)$

Abgleichbed.

$$\underline{Z}_1 \cdot R_4 = \underline{Z}_2 \cdot R_3$$

$$\Rightarrow |\underline{Z}_1| \cdot \cancel{e^{-j\frac{\pi}{2}}} \cdot R_4 = |\underline{Z}_2| \cdot \cancel{e^{-j\frac{\pi}{2}}} \cdot R_3$$



Abgleichbed. allgemein

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$$

$$|\underline{Z}_1| \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot |\underline{Z}_4| \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = |\underline{Z}_2| \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot |\underline{Z}_3| \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

für 4 kapazitäten

allgemein:

$$|\underline{Z}_1| \cdot e^{i\varphi_1} \cdot |\underline{Z}_4| \cdot e^{i\varphi_4} \quad |\underline{Z}_2| \cdot e^{i\varphi_2} \cdot |\underline{Z}_3| \cdot e^{i\varphi_3}$$

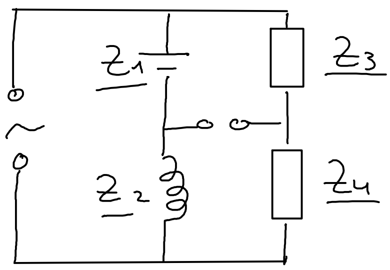
2 Bedingungen

- Betragsbed. : $|\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_4| = |\underline{Z}_2| \cdot |\underline{Z}_3|$
- Phasenbed. : $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_4} = e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\varphi_3}$

$$\Longrightarrow e^{i(\varphi_1+\varphi_4-\varphi_2-\varphi_3)} = 1$$

$$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_2 - \varphi_3$$

Bsp.:



$\varphi_1 = -\pi/2$

$\varphi_2 = \pi/2$

$\varphi_3 = \varphi_4 = 0$

nicht abgleichbar

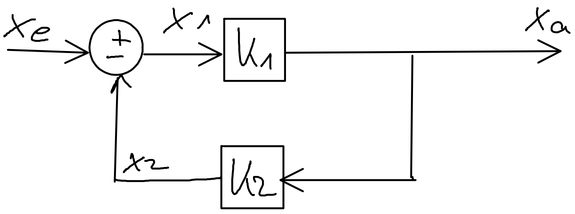
Messeffekt

$$\hat{U}_a = \hat{U}_0 \cdot \frac{|\Delta Z|}{|Z_0|} \cdot 1/C$$

$C = 4$	Viertelbrücke
$= 2$	Halbbrücke
$= 1$	Vollbrücke

4.3 Kreisstruktur von Messsystemen

29.3.11



$$x_a = x_1 k_1 \qquad (1)$$

$$x_2 = x_a k_2 \qquad (2)$$

$$x_1 = x_e \pm x_2 \qquad (3)$$

(3) in (1) : $x_a = (x_e \pm x_2) \cdot k_1 \quad (4)$

(2) in (4) $\quad x_a = (x_e \pm x_a \cdot k_2) \cdot k_1$

$$x_a = x_e \cdot k_1 \pm x_a k_1 \cdot k_2$$

$$x_a (1 \pm k_1 k_2) = x_e \cdot k_1$$

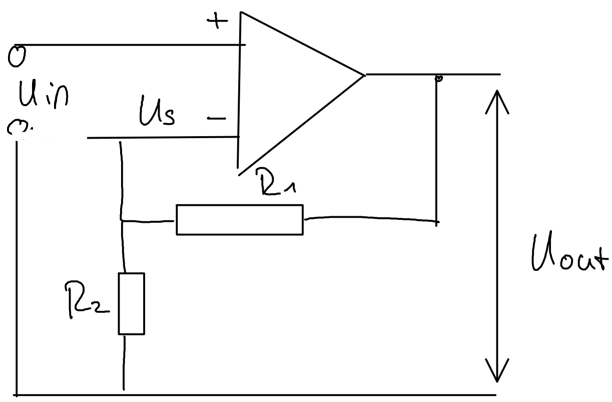
$$x_a = \underbrace{\frac{k_1}{1 \pm k_1 k_2}}_{k} \cdot x_e$$

wenn $k_1 k_2 \gg 1$ oder $k_1 \gg \frac{1}{k_2}$

$$\Longrightarrow x_a = \pm \frac{\cancel{k_1}}{k_1 \cancel{k_2}} x_e = \pm \frac{1}{k_2} \cdot x_e$$

$$k_{ges} = \pm \frac{1}{k_2}$$

Bsp.: Operationsverstärker



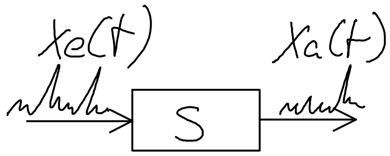
$$U_S = U_{in} - k_r \cdot U_{out} = U_{in} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{out}$$

$$U_{out} = U_S \cdot k_1 = U_S \cdot k_V$$

$$k = \frac{1}{k_r} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad \text{wenn } k_V \gg \frac{1}{k_r}$$

4.Dynamische Beschreibung von Messsystemen

5.4.10



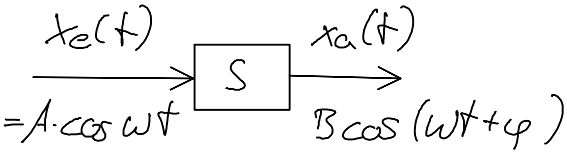
Zunächst lineare Systeme

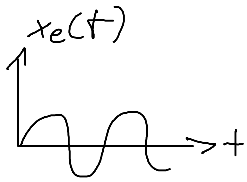
Eigenschaften

① $S\,(\underbrace{x_{e,1}(t)+x_{e,2}(t)}_{=x_a(t)}) = S(\underbrace{x_{e,1}(t)}_{x_{a,1}(t)}) + S(\underbrace{x_{e,2}(t)}_{x_{a,2}(t)})$

$= x_a(t) = x_{a,1}(t) + x_{a,2}(t)$

②



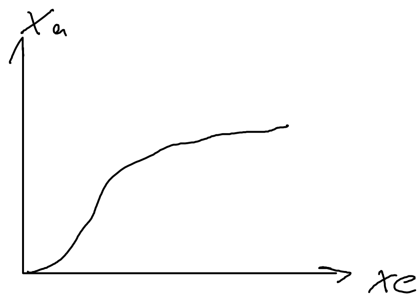


$A = A(\omega)$

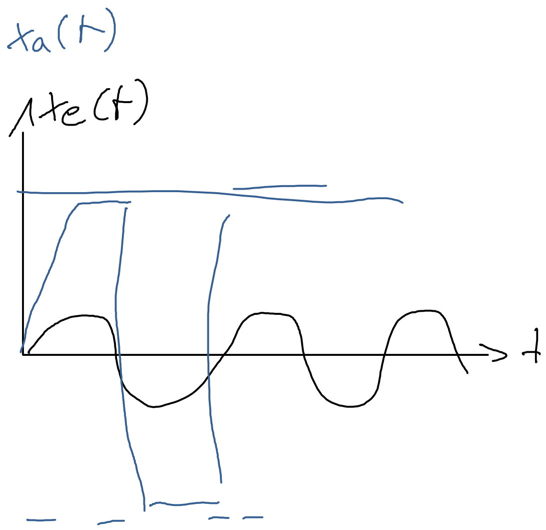
$\varphi = \varphi(\omega)$

nicht lineare Systeme
erhalten Frequenz nicht

Bsp.:



nicht lineare
Kennlinie



$$x_e = 1 \cdot \cos \omega t$$

$$x_a(t) = B_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + B_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)$$
$$+ B_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

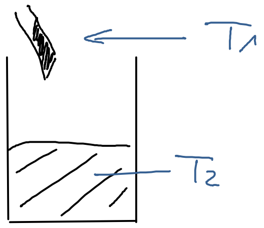
4.1 Sprungantwort

5.4.11

„Einheitsprung":

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{Sprungfkt.}$$

Bsp.: Quecksilber



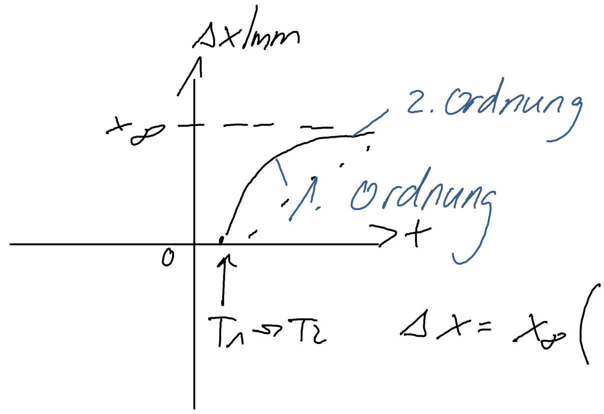
Anzeige: x_1 (statisch)

Anzeige: $x_2(t)$

$\Delta x(t) := x_2(t) - x_1$

Plötzliches Eintauchen $T_1 \to T_2$

allmähliche Einstellung $x_2(t)$



$$\Delta x = x_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow \Delta x = 0$$

$$t \to \infty \Rightarrow \Delta x = x_\infty$$

Statischer Übertragungsfaktor

$$K = \frac{x_\infty}{T_2 - T_1} \quad \curvearrowright \quad x_\infty = k\,(T_2 - T_1)$$

$$\to \Delta x = k(T_2 - T_1) \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot s(t)$$

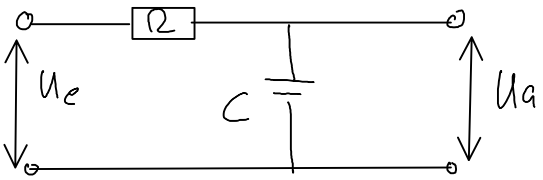
Einheitsprung: $s(t) \rightarrow$ Sprungantwort $h(t)$

$$h(t) := \frac{\Delta x(t)}{T_2 - T_1} = k \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \cdot s(t)$$

System 1. Ordnung

$$k = \lim_{t \to \infty} (h(t))$$

Bsp.: Elektrisches System 1. Ordnung



$u_e = u_0 \cdot s(t)$

$k = u_0$

Sprungantwort: $h(t) = u_0 (1 - e^{-t/\tau}) \cdot s(t)$

$$\tau = RC$$

$$h(t) = u_0 (1 - e^{-t/RC}) \cdot s(t)$$

4.2 Impulsantwort

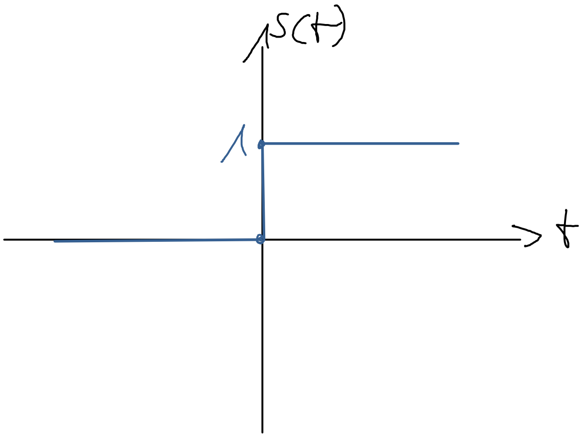
5.4.11

Def. Impuls:

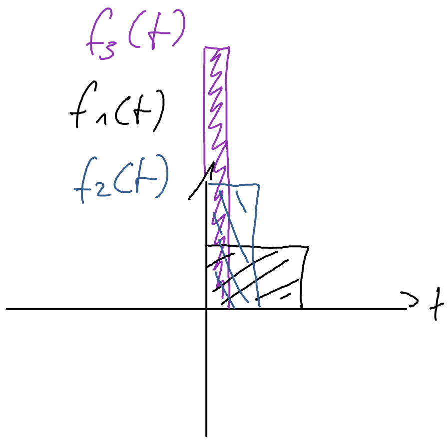
$$\delta(t) = \frac{d(s(t))}{dt} \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

und

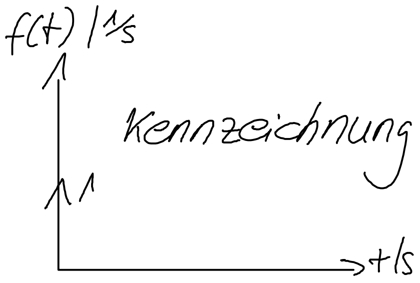
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$



Anschaulich



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$



Kennzeichnung Impuls durch Pfeil

Impuls allgemein

$$A \cdot \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t) \cdot dt = A$$

Impulsantwort:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Bsp.: System 1. Ordnung

$$h(t) = k\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot s(t)$$

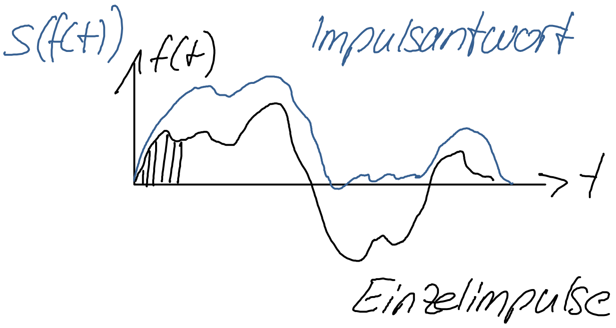
$$\Rightarrow g(t) = -k\left(-1/\tau\right) e^{-t/\tau} \cdot s(t) = k/\tau \cdot e^{-t/\tau} \cdot s(t)$$

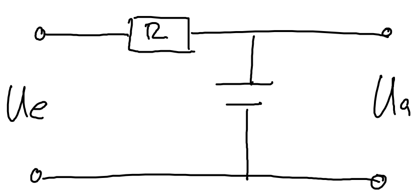
Bsp.: RC-System

$$g(t) = \frac{1}{R \cdot C} e^{-t/RC} \cdot s(t)$$

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 1$$

Antwort des Systems auf beliebigen Signal

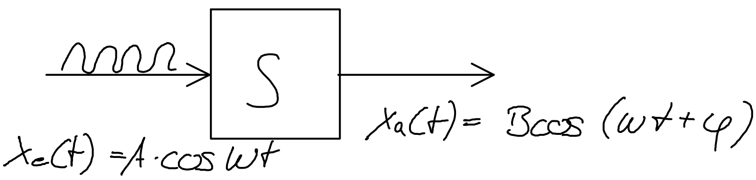




$$k = \lim_{t \to \infty} \frac{U_a(t)}{U_e} = 1$$

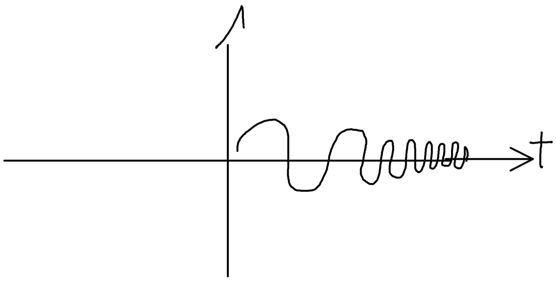
4.3 Übertragungsfunktion

5.4.11



$$\frac{B}{A} = \frac{B}{A}(\omega) \quad , \quad \varphi = \varphi(\omega)$$

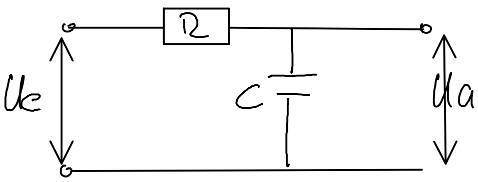
Typisches Messsignal:
Chirp



$$\underline{x_e}(t) = A \cdot e^{i\omega t} \qquad \underline{x_a}(t) = B \cdot e^{(i\omega t + \varphi)} = B \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi}$$

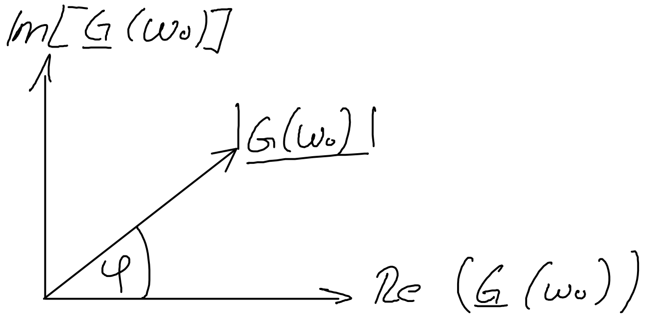
$$\frac{\underline{x_a}(t)}{\underline{x_e}(t)} = \frac{B \cdot \cancel{e^{i\omega t}} \cdot e^{i\varphi}}{A \cdot \cancel{e^{i\omega t}}} = \underbrace{\frac{B}{A}(\omega)}_{\text{Amplitudengang}} \cdot \underbrace{e^{i\varphi(\omega)}}_{\text{Phasengang}} = \underline{G}(\omega)$$

Bsp.: System 1. Ordnung



$k = 1$

$$\underline{G}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \qquad \text{Deby-Funktion}$$



$$|\underline{G}(\omega_0)| = \sqrt{Re^2(\underline{G}(\omega_0)) + Im^2(\underline{G}(\omega_0))}$$

$$\frac{1}{1+i\omega\tau} = \frac{1-i\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}$$

$$|\underline{G}(\omega_0)| = \frac{1}{1+(\omega\tau)^2}\sqrt{1^2+(\omega\tau)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

für $(\omega\tau)^2 \gg 1 \quad \left(\omega^2 \gg \frac{1}{\tau^2}\right) \Longrightarrow \omega^2 \gg \omega_g^2$

$$|\underline{G}(\omega_0)| \approx \frac{1}{\omega/\omega_g} = \frac{\omega_g}{\omega} \quad \text{falls } k=1$$

Allgemein

$$\underline{G}(\omega) = \frac{K}{1+i\omega\tau} \quad \text{(System 1. Ordnung)}$$

$$|\underline{G}(\omega)| = \frac{k\cdot f_g}{f}\, ; \quad \text{für } f \gg f_g$$

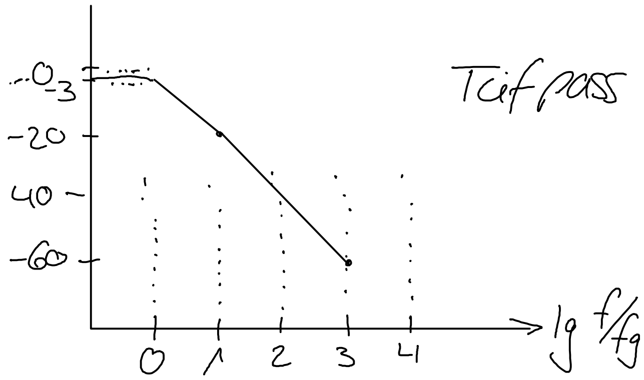
Phase:

$$\tan\varphi = \frac{Im(\underline{G}(\omega))}{Re(\underline{G}(\omega))} = -\omega\tau$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{f}{f_g}\right) \text{ ohne Näherung}$$

Bode-Diagramm

$$20\lg \frac{|\underline{G}(\omega)|}{K}$$



Tiefpass (Filter)

mit Näherung:

$$|\underline{G}(\underbrace{10 \cdot f_g}_{f_1})| = k \cdot \frac{f_g}{10 \cdot f_g} = \frac{k}{10}$$

$$|\underline{G}(100 \cdot f_g)| = \frac{k}{100}$$

$$|\underline{G}(1000 \cdot f_g)| = \frac{k}{1000}$$

$$20\lg \frac{|\underline{G}(10 f_g)|}{k} = 20\lg \frac{1}{10} = -20$$

$$20\lg \frac{|\underline{G}(100 \cdot f_g)|}{k} = 20\lg \frac{1}{100} = -40$$

$$20\lg \frac{|\underline{G}(1000 \cdot f_g)|}{k} = 20\lg \frac{1}{1000} = -60$$

$f = f_g$ mit Näherung: $20 \lg \frac{|G(1 \cdot f_g)|}{k} = \underline{0}$

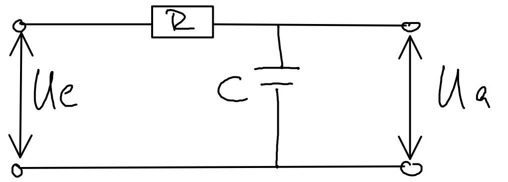
ohne Näherung:

$$|G(\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$20 \lg \frac{|G(f_g)|}{k} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{2}} = -3$$

„Dezibel"

Bsp.: elektrischer Schaltkreis



Verhältnis v. Ausgangs- zu Eingangsleistung

$$10 \lg \frac{U_a^2 \cdot R}{R \cdot U_e^2} = 20 \lg \frac{U_a}{U_e}$$

Charakteristika (Kenngrößen) eines Filters:

- Grenzfrequenz („3 dB - Punkt")
- Steilheit in $\frac{dB}{dec}$ (Dekade) $f_2/f_1 = 10$

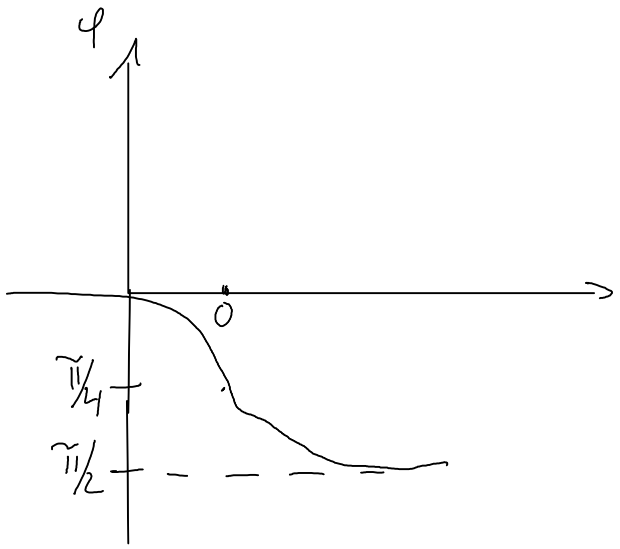
im Bsp.: $-20\ ^{dB}/_{dec}$

Steilheit in $\frac{dB}{oct}$ Oktave $\frac{f_2}{f_1} = 2$

$$20 \lg \frac{1}{2} = -6\ ^{dB}/_{oct}$$

- Phasenverschiebung

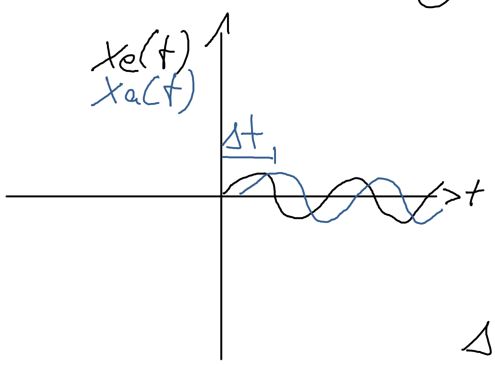
$k = \underline{G}(\omega = 0)$



Phasengang System 1. Ordnung

Zeitverschiebung des Signals

Bsp.: harmonisches Signal: $\Delta\varphi \xrightarrow{?} \Delta t$



$T = 1/f$

$$\frac{\Delta t}{T} = \Delta t \cdot f = \frac{\Delta \varphi}{2\pi}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta \varphi}{2\pi f}$$

<u>Konsequenz:</u>

Auch lineare Systeme verändern die Form von Signalen!

4.4 Zusammenhang von g(t) und $\underline{G}$(f)

5.4.11

$$\underline{G}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{i2\pi f \cdot t} \, dt$$

$\Rightarrow$ Fouriertransformation

System 1. Ordnung

$$\underline{G}(f) = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{k}{\tau} \, e^{-t/\tau} \cdot e^{i\,2\pi f \cdot t} \cdot dt$$

$$= \frac{k}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/\tau - i2\pi f)t} \, dt = \frac{k}{1 + i\,2\pi f \cdot \tau}$$

System 2. Ordnung

$$\underline{G}(f) = \frac{k}{1 - \left(\frac{f}{f_g}\right)^2 + i \cdot \frac{f}{f_g}}$$

$\uparrow$

5.Fehlerrechnung

12.4.11

5.1 Allgemeines

- Unbekannter wahrer Wert x_W einer Messung
- Messwerte aus Reihe (n Versuche) x_i (i=1..n)
- Wahrscheinlichster Wert x_c
- Messunsicherheit u
- Ergebnis $x = x_c \pm u$

Fehlerarten:

- Grobe Fehler
- Systematischer Fehler

} prinzipiell korrigierbar

- Stochastischen (zufälligen) Fehler --> nur statistisch

5.2 Systematischer Fehler

Ermitteln einer Korrekturgröße e_C aus Kenntnis von bestimmten Einflüssen.

Maximalisierungsprinzip:

Abschätzung des maximalen e_C

Umkehrung:

Kann man ermittelten system. Fehler durch einen bestimmten Einfluss alleine erklärt werden?

Systematischer Restfehler: e_S

z.B. Angabe auf Messgerät

Genauigkeitsangabe: e_S
(Prozent v. Vollausschlag)

Bsp.: Spannungsmessgerät

Messbereich: 5V
Angabe: Klasse 0,5

Messung 5V: $e_S = 25\,mV \mathrel{\hat{=}} 0{,}5\%$

Messung 1V: $e_S = 25\,mV \mathrel{\hat{=}} 2{,}5\%$

Für Messunsicherheit u:
e_S nicht korrigierbarer Anteil

5.3 stochastischer Fehler u. Statistik

Messung $\Rightarrow$ Zufallsvariable

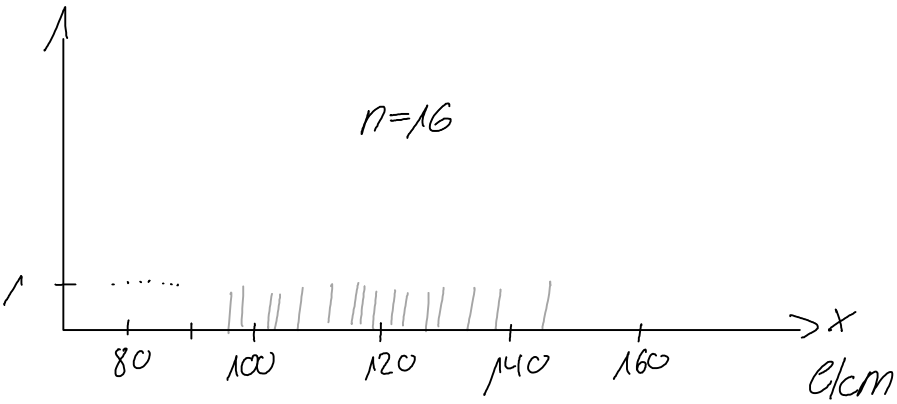
$\swarrow$ diskrete Werte

$\searrow$ stetige Grundgesamtheit

$\Rightarrow$ Stichproben

5.3.2 Häufigkeitsverteilungen

Stichprobe vom Umfang w
Merkmal: X
Bsp.: Körperlänge



Einzelwerte x_j

abs. Häufigkeit Vorkommen x_j : $k(x_j)$

rel. Häufigkeit Vorkommen $h(x_j) = \frac{k(x_j)}{n}$

Bildung von Klassen

Bsp.:

Klasse 1 („85cm") [80cm ; 90cm]
Klasse 2 („95cm") [90cm; 100cm]
⋮

Anzahl d. Klassen : N

Klassenbreite : Δx

Ganzer Wertebereich Breite : $N \cdot \Delta x$

Mitte der Klasse : x_j

Wahl v. N

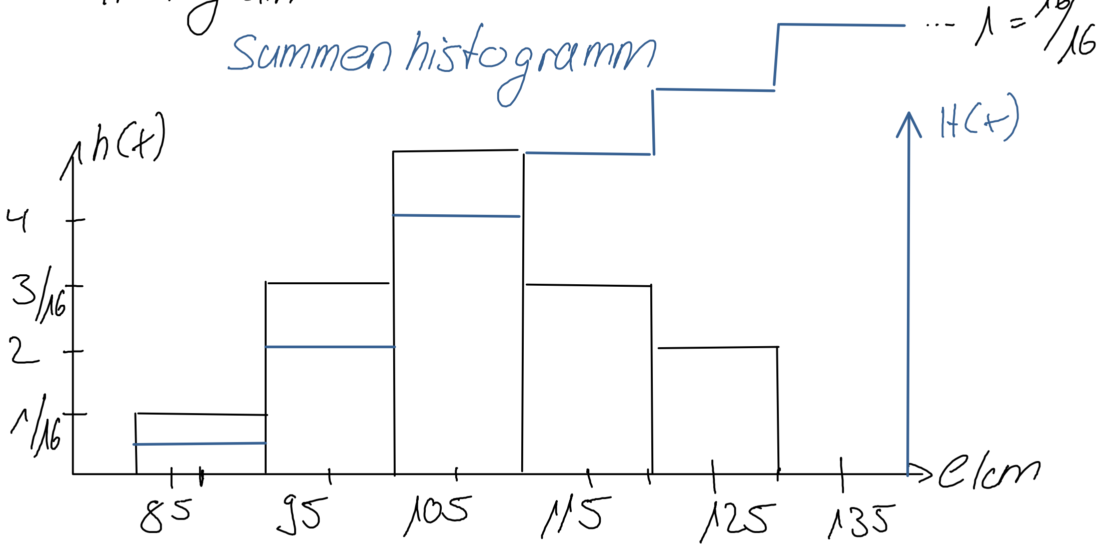
z.B.: $N = \sqrt{n}$

oder $N = 5 \lg N$

oder $N = 7$ für 95% der Werte

Histogramm

Summenhistogramm



$$\lim_{x \to \infty} H(x_j) = 1 \qquad \sum_{i=1}^{N} h(x_j) = 1$$

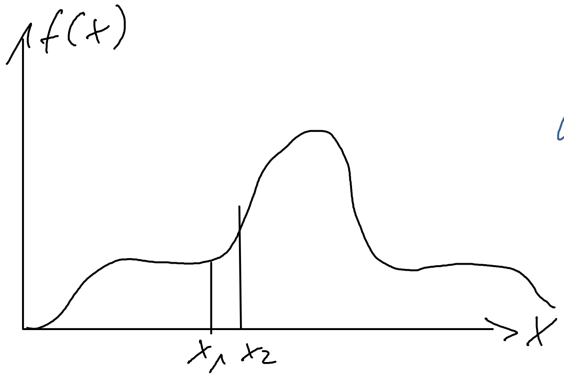
5.3.3 Übergang

$n \to \infty$

$N \to \infty$

$\Delta x \to dx$

→ Kontinuierliche Häufigkeitsverteilung



Wahrscheinlichkeitsdichte Verteilung

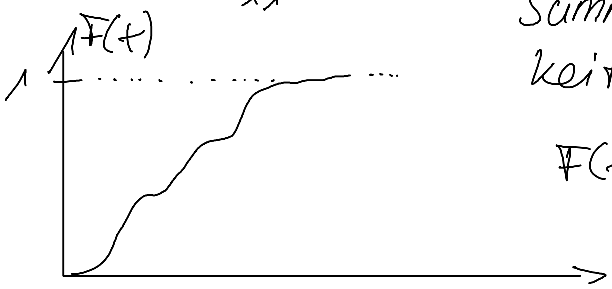
Eigenschaften:

$$\int f(x)\, dx = 1$$

wenn x Einheit [cm] hat

$= [f(x)] = 1/cm$

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx$$



Summenwahrscheinlichkeit x

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\, dx'$$

$F(x) = P(-\infty, x)$

5.3.3 Parameter zur statistischen Beschreibung

12.4.11

1. Parameter:

Mittelwert (Erwartungswert): μ

$$\mu = 1/N \sum_{j=1}^{N} h(x_j) \cdot x_j$$

Alternativ: Median

x_{med} mit $\sum_{j=1}^{(n_1)} h(x_j) x_j = \sum_{n_1}^{N} h(x_j) x_j$

x_{med} im Intervall n_1

2. Parameter:

Standartabweichung σ

$\Rightarrow$ varianz σ^2

$$\sigma = \lim_{N \to \infty} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (x_j - \mu)^2 \, h(x_j)}$$

schätzwert s für n Messungen

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}$$

Anzahl Freiheitsgrade

Kontinuierliche Messgrößen

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx}$$

$$\bar{x} = 1/n \sum_{j=1}^{N} x_j \cdot k(x_j) \qquad N \text{ Klassen}$$

$$s = \sqrt{1/n \sum_{j=1}^{N} (x_j \cdot \bar{x})^2 \cdot k(x_j)}$$

Ziel:

Vertrauensbereich, d. angibt in welchem Intervall von $[\bar{x} - ?, \bar{x} + ?]$ d. wahre Wert μ mit bestimmter Wahrscheinlichkeit liegt. (z.B. 95%)

Dazu notwendig: Verteilungsgesetz

in Messtechnik:

- Normalverteilung (Gauß)
- Rechteckverteilung

$\Longrightarrow f(x)$